**Tentamen Statistiek MBW/KW deel 1, eerste kans**

**Tentamen Statistiek MBW/KW deel 1, finale kans (2023)**

Afdeling: Propedeuse KW/MBW 2022-2023 en 2023-2024

Examinator: Dr. J.B.M. Melissen

Datum: 6 juni 2024, **duur tentamen: 3 uur**

1. **Alle antwoorden moeten gemotiveerd worden**!

2. Rond eindantwoorden (kommagetallen) af op *vier* decimalen, tenzij anders vermeld.

3. Boeken, reader en aantekeningen mogen worden geraadpleegd.

4. De aanwezigheid van *communicatieapparatuur* is niet toegestaan.

5. Het gebruik van een (grafische) rekenmachine met statistische programmatuur is toegestaan. Het *statistische* gebruik van deze rekenmachine is mogelijk ingeperkt. Let op de aanwijzingen!

6. **De opgaven dienen na afloop van het tentamen ingeleverd te worden.**

Dit tentamen bestaat uit vier opgaven (30, 25, 25, 20 punten). Score = Puntentotaal/10

Algemeen: -1pt per rekenfout

**Opgave 1 (Totaal 30 punten)**

De kansvariabele heeft de volgende kansdichtheidsfunctie:

**1a. [4pt]** Leg uit waarom dit een goed gedefinieerde kansdichtheidsfunctie is. Maak hierbij gebruik van een berekening.

is niet negatief (want tussen 0 en 5 zijn en niet negatief) 1+1pt

2pt

**1b. [4pt]** Bereken .

4pt

**1c. [8pt]** Bereken de verwachtingswaarde en de standaarddeviatie van de kansvariabele .

2+1pt

2+1pt

2pt

**1d. [6pt]** Bereken de mediaan van de kansvariabele , m.a.w. de waarde waarvoor geldt dat . **Dit onderdeel is niet meegeteld.**

2pt

Los op: 2pt

Levert op: 2pt

**1e. [8pt]** Er worden 36 waarden uit deze kansverdeling getrokken en het gemiddelde van deze waarden wordt bepaald. Gebruik de centrale limietstelling om de kans uit te rekenen dat deze gemiddelde waarde tussen 1,5 en 2,5 zit.

Volgens de centrale limietstelling voldoet de gemiddelde waarde van de steekproef van 36 waarden bij benadering aan een normale verdeling 2pt

met een gemiddelde waarde die gelijk is aan de oorspronkelijke 2pt

en een standaarddeviatie 2pt

De kans dat de gemiddelde waarde zit tussen 1,5 en 2,5 is dus 2pt

**Opgave 2 (Totaal 25 punten)**



In Breda is een beruchte zebra op de Delpratsingel. De zebra is bedoeld voor voetgangers die van station naar centrum gaan en terug. De zebra is erg breed en daarnaast lopen ook fietspaden die voorrang hebben. Hierdoor is het voor automobilisten vaak erg lastig om deze zebra over te steken omdat er altijd wel weer ergens een voetganger aan komt sjokken of een fietser langs scheurt.

We bekijken een sterk vereenvoudigde situatie waarbij over de zebra gemiddeld 4 voetgangers per minuut oversteken vanuit het station richting centrum. Een voetganger doet er gemiddeld 8 seconden over om de zebra over te steken. We nemen aan dat de zebra dan voor auto’s geblokkeerd is. Er komen gemiddeld 8 auto’s per minuut die vanuit één richting de zebra willen passeren (de andere richting negeren we), dit kost 4 sec per auto.   
  
**2a. [3pt]**. Neem eerst aan dat alle voetgangers apart oversteken, d.w.z., als er een voetganger op de zebra is steken er geen andere voetgangers tegelijkertijd over. De auto’s halen elkaar niet in en kunnen alleen maar één voor één oversteken, maar natuurlijk alleen als er geen voetgangers op de zebra lopen. Kunnen in deze situatie gemiddeld alle auto’s oversteken of verwacht je op den duur een file?

Het oversteken van vier voetgangers kost gemiddeld 4 x 8 = 32 seconden. 1pt

Het oversteken van acht auto’s kost gemiddeld 8 x 4 = 32 seconden. 1pt

Samen kost dit 64 seconden, dat zijn er meer dan in één minuut, dus op den duur ontstaat er bij deze voorwaarden een file. 1pt

We nemen nu aan dat de auto’s en voetgangers zich volgens een Poissonproces aandienen. We nemen verder aan dat één van de volgende twee situaties optreedt:

1. Gedurende 4 seconden komen er geen voetgangers over de zebra.
2. Gedurende 4 seconden gaat er minstens één voetganger oversteken.

**2b. [4pt]** Bereken de kans dat Situatie A optreedt en de kans dat Situatie B optreedt.

In situatie A komt er in een periode van 4 seconden geen voetganger. Neem in de Poissonverdeling een tijdseenheid van 4 seconden aan, dan is daarin het gemiddeld aantal voetgangers 1pt

De kans op Situatie A is de kans dat er in die vier seconden géén voetganger langskomt: 2pt

Situatie B is daarvan het complement met kans 1 – 0,76590 = 0,23410 1pt

**2c. [2pt]** Leg uit waarom we in opgave 2b te maken hebben met een Bernoulli-experiment. Wat is in dit experiment de gebeurtenis en wat is de slaagkans?

Elke keer treedt Situatie A op óf Situatie B. De slaagkans (bv. Situatie A voor de auto’s) is 0,7659. 2pt

In situatie A kan één auto de zebra passeren. Situatie A duurt 4 seconden.

In situatie B kan er geen auto passeren omdat er voetgangers oversteken. We gaan van de worst case situatie uit dat er een voetganger begint te lopen aan het eind van deze periode van 4 seconden. De zebra is dan 4 + 8 seconden bezet dus situatie B duurt 12 seconden.

**2d. [6pt]** Bereken onder de aannames van hierboven de verwachtingswaarde van het aantal auto’s dat de zebra kan passeren (Let op: dit is geen geheel getal!). Bereken ook de verwachtingswaarde van de **duur** van deze gebeurtenis (één keer Situatie A of B). **Dit onderdeel is niet meegeteld.**

De verwachtingswaarde voor het aantal auto’s dat kan passeren is

1 auto x 0,7659 (kans Situatie A) + 0 auto’s x 0,2341 (kans Situatie B) = 0,7659 auto’s. 3pt

De verwachtingswaarde voor de duur is

4 sec x 0,7659 (kans Situatie A) + 12 sec x 0,2341 (kans Situatie B) = 5,8728 seconden. 3pt

**2e. [4pt]** Bereken met behulp van de antwoorden op 2d hoeveel auto’s er gemiddeld per minuut kunnen passeren. **Dit onderdeel is niet meegeteld.**

(0,7659 auto’s / 5,8728 seconden ) \* 60 seconden = 7,8249 auto’s per minuut 4pt

Dit betekent: geen file op termijn want gemiddeld minder dan 8 auto’s per minuut.

**2f. [6pt]** We gaan er nu vanuit dat er gemiddeld 2,6 voetgangers per minuut van station naar centrum gaan en 1,4 van centrum naar station. Bereken de kans dat er in een minuut 4 voetgangers de zebra passeren. Houdt rekening met vijf verschillende mogelijke combinaties.

Er zijn vijf combinaties:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Naar  centrum | Naar station | kans | = |
| 0 | 4 | poisoncdf(2.6 , 0) x poisoncdf(1.4 , 4) | 0,00293 |
| 1 | 3 | poisoncdf(2.6 , 1) x poisoncdf(1.4 , 3) | 0,02178 |
| 2 | 2 | poisoncdf(2.6 , 2) x poisoncdf(1.4 , 2) | 0,06067 |
| 3 | 1 | poisoncdf(2.6 , 3) x poisoncdf(1.4 , 1) | 0,07511 |
| 4 | 0 | poisoncdf(2.6 , 4) x poisoncdf(1.4 , 0) | 0,03487 |
| Totaal |  |  | **0,1954** |

1+1+1+1+1+1pt

Dit is hetzelfde als poisoncdf(2.6 + 1.4 , 4) = poisoncdf(4 , 4) = 0,1954 5 bonuspt

**Opgave 3 (Totaal 25 punten)**

Een militaire eenheid voert patrouilles uit in een bepaald gebied om vijandelijke activiteiten te monitoren. De eenheid heeft gegevens verzameld over het aantal ontmoetingen per dag gedurende een periode van 16 dagen. Het kwam 5 keer voor dat er geen ontmoeting op een dag was, 7 keer was er één ontmoeting, 3 keer twee ontmoetingen en 1 keer drie ontmoetingen.

**3a [4pt]** Laat door berekening zien dat het gemiddeld aantal ontmoetingen per dag gelijk is aan 1,000.  
 4pt

**3b [4pt]** Ga ervan uit dat de kansen worden gegeven door de gegevens van de 16 dagen aan het begin van deze opgave (m.a.w. dat het niet gaat om een steekproef). Laat door berekening zien dat de standaarddeviatie in aantal ontmoetingen per dag gelijk is aan 0,8660.

2pt

2pt

Neem aan dat het aantal ontmoetingen per dag benaderd kan worden door een normale verdeling met gemiddelde en standaarddeviatie zoals gegeven in 3a en 3b.  
  
**3c [6pt]** Bereken met deze normale verdeling de kans dat het aantal ontmoetingen 1 of 2 is. Houd hierbij rekening met de continuïteitscorrectie.  
 6pt

Onjuiste continuïteitscorrectie: -3pt

**3d [6pt]** Bereken met deze normale verdeling de kans dat het aantal ontmoetingen groter dan drie is. Houd hierbij rekening met de continuïteitscorrectie.  
 6pt

Onjuiste ondergrens: -2pt

**3e [5pt]** Bereken met deze normale verdeling het aantal (niet geheeltallige schatting zonder continuïteitscorrectie), waarboven de kans op minstens dat aantal hoogstens 10% is.

Onjuiste grens: -2pt

**Opgave 4 (Totaal 20 punten)**

Karel is gepensioneerd en wil de relatie met zijn vrouw goedhouden. Daarom gaat hij elke dag vissen. Meestal vangt hij geen vis, maar gemiddeld eens in de zes dagen komt hij thuis met een visje. Nadat er een foto is gemaakt voor de kleinkinderen wordt de vis gevoerd aan de poes Snollebol en wordt een vis van de Albert Heijn gebakken en gegeten.  
  
**4a [3pt]** Bereken de kans dat Karel in één week minstens twee vissen vangt.  
We gaan ervan uit dat Karel elke dag een vis vangt met kans 1/6, dus een binomiale verdeling.  
We gaan ervan uit dat het aantal vissen dat Karel vangt aan een Poissonverdeling voldoet met een gemiddelde van één vis in de zes dagen.  
Voor een week als tijdseenheid geldt dat hij gemiddeld vissen per week vangt.

**4b [3pt]** Bereken de kans dat Karel in één week hoogstens twee vissen vangt.  
**4c [2pt]** Leg uit waarom de som van de kansen van 4a en 4b wel of niet gelijk is aan 1.  
Niet gelijk, want bij optellen telt de kans tweemaal mee.  
  
**4d [6pt]** Bereken het gemiddeld aantal vissen dat Karel in een jaar vangt. Bereken ook de standaarddeviatie in deze waarde.

Voor een periode van een jaar en de Poissonverdeling geldt

**4e [6pt]** Bereken hoeveel dagen Karel moet vissen om met 95% zekerheid 4 vissen te vangen.  
Dit gaat niet met de GR. Uitproberen

dus .  
Voor dagen als tijdseenheid geldt dat hij gemiddeld vissen vangt.  
Dit levert .